



DOI: 10.12382/bgxb.2025.0239

基于改进 Bootstrap 方法的固体火箭发动机 小样本系统可靠性评估

杜明龙^{1*}, 万鋆², 王保鑫³, 贾新宇¹, 冯浩¹, 宋军⁴, 李吉祯⁵

(1. 西安交通大学 机械工程学院, 陕西 西安 710049; 2. 重庆长安汽车股份有限公司, 重庆 400000;

3. 中车青岛四方机车车辆股份有限公司, 山东 青岛 266111; 4. 西安现代控制技术研究所, 陕西 西安 710065;

5. 西安近代化学研究所, 陕西 西安 710065)

摘要: 为了解决小样本条件下固体火箭发动机系统的可靠性评估难题, 提出基于改进 Bootstrap 方法的可靠度评估框架。通过发动机组件分解建立串联系统可靠性模型, 分别处理成败型单元 (二项分布) 和寿命型单元 (指数/威布尔/正态分布)。采用 B-样条函数重构经验分布函数, 结合 k -means 聚类剔除 Bootstrap 重采样中的异值点, 实现寿命型单元参数估计误差率较传统方法降低 60% ($n=15$ 时误差小于等于 $\pm 5\%$)。建立发动机子系统置信下限与系统可靠度的联合约束模型, 通过实例验证表明: 系统可靠度置信下限可达 0.849 3 (置信度 0.95), 较 LM (列文伯格-马夸尔特) 方法提升 15.4%。该方法可有效解决小样本、多失效模式下串联系统的可靠性评估问题, 为固体火箭发动机的可靠性提升提供理论支撑。

关键词: 固体火箭发动机; 小样本可靠度评估; Bootstrap 方法; 贝叶斯理论; 参数估计

中图分类号: TJ763

文献标志码: A

文章编号: 1000-1093(202x)xx-250239-XXX

System Reliability Assessment of Solid Rocket Motors Based on Modified Bootstrap Method Under Small-sample Conditions

DU Minglong^{1*}, WAN Jun², WANG Baoxin³, JIA Xinyu¹, FENG Hao¹, SONG Jun⁴, LI Jizhen⁵

(1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi, China;

2. Chongqing Changan Automobile Company Limited, Chongqing 400000, China;

3. CRRC Qingdao Sifang Co., Ltd., Qingdao 266111, Shandong, China;

4. Xi'an Modern Control Technology Research Institute, Xi'an 710065, Shaanxi, China;

5. Xi'an Modern Chemistry Research Institute, Xi'an 710065, Shaanxi, China)

Abstract: A reliability assessment framework based on an improved Bootstrap method is proposed to address the reliability assessment challenges of solid rocket engine systems under small-sample conditions. A series system reliability model is established by decomposing the engine components, which separately handles the success-failure units characterized by binomial distribution and the lifetime units characterized by exponential, Weibull or normal distributions. An empirical distribution function is reconstructed using a B-spline function, and the outliers in Bootstrap resampling are eliminated utilizing k -means clustering, thus reducing the parameter estimation error for lifetime units by 60% (with error less than or equal to $\pm 5\%$ when $n=15$) compared to traditional methods. A joint constraint model for the confidence limits of engine subsystem and the system reliability is developed. The validation through examples shows that the lower bound of system reliability confidence can reach 0.849 3 with a confidence level of 0.95, which is 15.4% higher than that of the Levenberg-Marquardt method. The proposed method effectively resolves the reliability assessment problems for series systems with small samples and multiple failure modes, providing theoretical support for enhancing the reliability of solid rocket motor.

Keywords: solid rocket motor; small-sample reliability assessment; Bootstrap method; Bayesian theory; parameter estimation

0 引言

固体火箭发动机因结构紧凑、环境适应性优良，在现役装备中广泛应用。尽管研制过程中积累了大量零部件试验信息，但受试验经费限制，整机试验样本数量较少。小型战术导弹固体火箭发动机年产量可达上万发，但小样本条件下可能导致可靠性评估不准确，需要建立相应的计算方法。

在实际工程问题中，容量小于50的样本具有小子样特征^[1,2]。小样本评估问题主要分为如下3个方向。

一是在贝叶斯理论框架下，通过构建混合Beta分布作为先验分布，重点突破多源数据融合技术。例如：Wilson等^[3]验证了贝叶斯方法在小样本条件下的优越性；王博等^[4]提出了一种基于多源信息融合的Bayes方法，通过整合温度试验、振动试验和动作试验数据，来解决航天阀门小样本、少失效条件下的可靠性评估问题；Huang等^[5]提出了一种基于多源先验信息的高可靠性系统三态可靠性评估方法，旨在解决小样本、无失效数据条件下的可靠性评估问题；Cheng等^[6]提出了一种基于多源信息融合的Bayes方法，通过整合多类试验数据，解决航天阀门小样本可靠性评估问题。

二是在数据增强领域，基于Bootstrap的重采样技术与高精度仿真模型相结合，将小样本问题转换为大样本问题，显著降低了外场试验需求。例如：Amalnerkar等^[7]结合Bootstrap信息准则和重采样方法，提高了小样本评估精度；张震等^[8]提出B-极大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)法，通过Bootstrap重抽样和MLE相结合，显著改善了参数估计精度；刘帼巾等^[9]通过灰色GM(1,1)模型扩充试验数据，构建改进的Bootstrap-Bayes方法，评估电子式剩余电流动作断路器的可靠性；韩思杰等^[10]提出填充最小二乘法结合改进Bootstrap法，对多重定时截尾石化安全设备寿命数据进行扩充和可靠度评估；You等^[11]提出了一种基于虚拟增强与Bootstrap-Bayes的小样本加速寿命试验可靠性评估方法，通过数据扩充和贝叶斯推断，有效提升了高可靠性产品的可靠性评估精度。

三是在系统层级整合方面，发展了列文伯格-马夸尔特法(Levenberg-Marquardt, LM)、修正极大似然估计法(Modified Maximum Likelihood, MML)和综合的修正极大似然估计和序贯压缩法(Combined Modified Maximum Likelihood and Sequential Reduction, CMSR)等多级综合方法^[12]，构建了从元件到分系统的纵向评估体系。特别是信息熵法的引入提升了数据利用率^[13]；Li等^[14]通过测量缓冲行

程建立子系统可靠性置信下限乘积理论，建立了航天器着陆缓冲机构系统层面的小样本可靠性评估方法；Zhang等^[15]通过平均秩法、最小平均平方距离法和总最小二乘估计，解决了高可靠性电子元件可靠性评估的系统性挑战。该技术体系在运载火箭、导弹等复杂装备评估中展现出独特优势。

以上3个方向从知识整合、数据扩展和结构优化角度解决复杂系统高可靠要求与小样本试验的矛盾。

然而，现有方法在系统级试验数据与组件试验数据融合中存在置信传递效率低的问题。战术导弹作为一次性武器，其试验数据以成败型为主，但组件存在潜在寿命分布特征。常用的LM法、MML法将连续分布试验结果折合为等效样本数^[16,17]，导致试验信息丢失，难以满足武器系统高置信度要求^[18]。

因此，本文提出基于改进Bootstrap方法的可靠度评估框架，通过建立串联系统可靠性模型、区分成败型和寿命型单元，并结合一次B-样条重建经验分布函数，运用k-means聚类剔除异值点，最终构建子系统置信下限与系统可靠度的联合约束模型。该方法旨在提高系统级可靠度的置信度评估，为固体火箭发动机可靠性验证提供新技术途径。

1 固体火箭发动机系统单元类型与可靠性组成

1.1 固体火箭发动机单元分布类型

发动机常用的寿命分布类型可概括为两大类别：

- 1) 离散型分布，典型为二项分布、泊松分布等；
- 2) 连续型分布，常见为指数分布、正态分布、对数正态分布、威布尔分布等。

在固体火箭发动机系统可靠性评估中，单元分布类型主要包括成败型试验的二项分布模型，寿命型试验的指数分布、正态分布、威布尔分布模型，以及机械产品的应力-强度干涉模型（最终归结为前述3种分布模型的计算）。在进行可靠度计算前，需要确定单元可靠性寿命分布类型，主要通过两种方法：其一，根据单元失效机理及工程经验进行分析，确定特性服从哪种分布；其二，利用单元样本数据进行分布拟合优度检验^[19]，如针对Weibull分布的M检验、正态分布的W检验等。

表1 固体火箭发动机单元可靠性分布类型

Table 1 Reliability distributions of SRM units

单元名称	分布类型	单元名称	分布类型
药柱	成败型	绝热层	正态分布模型
点火具	成败型	烧蚀层	威布尔分布模型
壳体	应力强度型	电发火管	成败型
螺栓	应力强度型	衬层	威布尔分布模型

前后接头	应力强度型	连接法兰	正态分布模型
前后封头	应力强度型	橡胶密封圈	应力强度型
电子产品	指数分布模型	喉衬组件	威布尔分布模型

1.2 固体火箭发动机系统可靠性框图

某型固体火箭发动机由 4 个主要部分组成：推进剂药柱、燃烧室、喷管和安全点火装置，此外还

包括用于各个部分的密封装置和连接件，如图 1 所示。发动机的每个组件都必须正常工作才能保证系统可靠，因此从结构上可将其视作一个串联系统。同时各个组件按照可靠性试验获得可靠度点估计以及给定置信度的置信下限，且各组件之间相互独立。

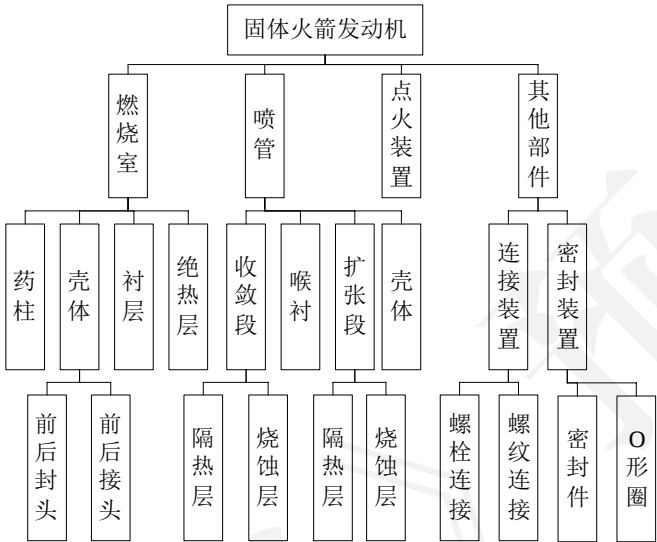


图 1 固体火箭发动机组成

Fig.1 Components of SRM

壳体和连接装置作为基础结构件，基于工程经验，这类机械结构在正常使用下几乎不会发生失效，其可靠度可视为 1，即在产品寿命周期内可视为完全可靠的，因此建立固体火箭发动机故障树如图 2 所示，故障编码及故障模式名称如表 2 所示。

组件如表 2 所示。

表 2 固体火箭发动机单元可靠度名称

Table 2 SRM unit reliability nomenclature			
组件	故障编码	故障模式名称	可靠度
燃烧室药柱	X01	破裂、变形等	R_1
燃烧室衬层	X02	脱粘、裂缝等	R_2
燃烧室绝热层	X03	破损、烧穿等	R_3
喷管收敛段隔热层	X04	破损失强等	R_4
喷管收敛段烧蚀层	X05	失强、脱粘等	R_5
喷管喉衬	X06	破裂、热应力失效等	R_6
喷管扩张段隔热层	X07	破损、失强等	R_7
喷管扩张段烧蚀层	X08	失强、脱粘等	R_8
点火装置	X09	受潮、药量不够等	R_9
密封装置	X10	失效等	R_{10}

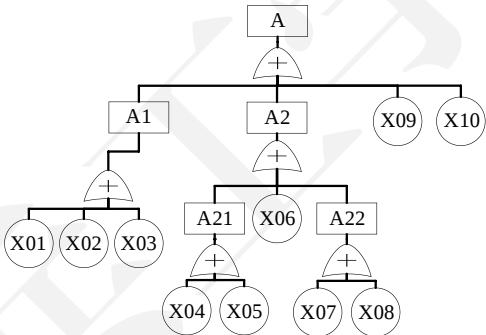


图 2 固体火箭发动机故障树

Fig.2 SRM fault tree

故障编码及故障模式名称如表 2 所示。图 2 中，A、A1、A2、A21、A22 分别为发动机、燃烧室、喷管、收敛段、扩张段出现故障，X01~X10 对应故障

经过分析得到图 3 所示的串联系统可靠性框图，其中各子系统单元可靠度名称如表 2 所示。固体火箭发动机的整体可靠性由各子系统可靠性串联决定，任一子系统的失效将导致整个系统的失效。

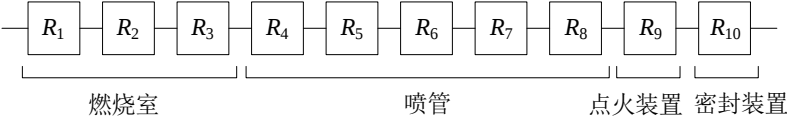


图 3 固体火箭发动机可靠性框图

Fig.3 Reliability logic diagram of SRM

2 固体火箭发动机串联系统可靠度计算方法

固体火箭发动机作为串联系统，可靠性由各组件决定。组件分解明确了系统可靠度结构，但在小样本的情况下传统方法的误差较大。本文提出改进 Bootstrap 方法，对成败型和寿命型单元分别计算可靠度置信下限，通过串联模型实现系统高置信评估。

2.1 成败型单元可靠度的计算

成败型单元又称为二项分布单元，其试验数据是通过成败型试验获得的。按照可靠性评估的经典方法。设某二项分布单元，在 n 次重复独立试验中，成功 s 次，失败 f 次。Bayes 方法在评估时通常采用共轭先验分布，即 Beta 分布作为先验分布。

$$\pi(R) = \frac{R^{a-1}(1-R)^{b-1}}{\beta(a,b)} \quad (1)$$

式中： $\pi(R)$ 为可靠度 R 的先验概率密度函数， R 为可靠度参数； $\beta(a,b)$ 为 Beta 函数， a 和 b 为验前分布的超参数，确定验前分布形式时， a 和 b 的取值直接决定了分布的具体形态。若有历史试验信息，则可直接由历史试验成败数确定。若无验前信息，则可按照 Reformulation 假设，取 $\beta(0,0)$ ，即 $a=b=0$ ；或者按照 Bayes 假设，取 $[0, 1]$ 上的均匀分布，即 $\beta(1,1)$ ，则取 $a=b=1$ ；也可依据 Jeffreys 准则，即取 $\pi(R)$ 为 $\beta(0.5,0.5)$ ，则 $a=b=0.5$ 。

或者依靠专家的经验及对产品摸底试验的结果，确定产品可靠度均值 ER 。置信度 γ 的单侧置信下限为 R_L ，下标 L 表示下限，可通过求解式(2)获得。

$$\begin{cases} \frac{a}{a+b} = ER \\ \int_0^{R_L} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} r^{a-1}(1-r)^{b-1} dr = 1-\gamma \end{cases} \quad (2)$$

式中： ER 为产品可靠度均值； γ 为置信度。

根据 Bayes 定理，可得验后分布为

$$\pi(R|n,s) = \frac{R^{s+a-1}(1-R)^{n-s+b-1}}{\beta(s+a,n-s+b)} \quad (3)$$

基于验后分布 $\pi(R|n,s)$ ，可按式(4)、式(5)求得可靠度点估计以及给定置信度 γ 下的可靠度置信下限。

$$\hat{R} = (s+a)/(n+a+b) \quad (4)$$

$$\int_{R_L}^1 \pi(R|n,s) dR = \gamma \quad (5)$$

式中： $\hat{R}$ 为可靠度点估计。

2.2 寿命型单元可靠度的计算

对于寿命型单元可靠度的计算，基于文献[19]所述方法，对小样本失效数据作拟合优度检测，得到其最适寿命分布类型。

2.2.1 基于 B-样条函数的抽样方法

传统的经验分布函数主要基于中位秩公式构造，图 4 为标准正态分布的经验分布函数对比图，从中可以看出传统经验分布呈阶梯状分布。

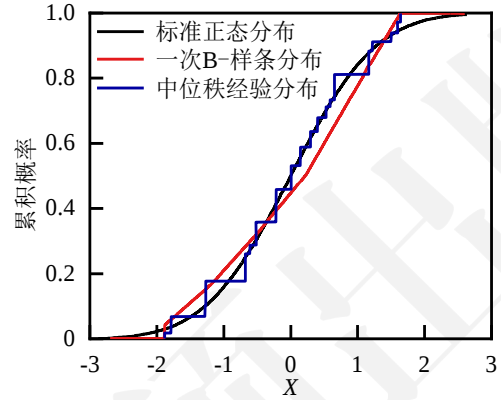


图 4 经验分布函数对比图

Fig.4 Comparison of empirical distribution functions

小样本情况下阶梯状的经验分布函数将导致再抽样样本相对集中，会影响后续统计计算。因此本文采用一次 B-样条函数予以替代，其具体构造过程如下：

1) 将失效数据 $x_1, \dots, x_n$ 从小到大进行排序，得到 $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ ，构造折线函数 $F_n(x)$ 如下：

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{2}{n(x_{(k+2)} - x_{(k)})} x + \frac{kx_{(k+2)} - x_{(k+1)} - (k+1)x_{(k)}}{n(x_{(k+2)} - x_{(k)})}, & x \in [\frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}, \frac{x_{(k+1)} + x_{(k+2)}}{2}] \\ 1, & x > x_{(n)} \end{cases} \quad (6)$$

式中： $k=0,1, \dots, n-1$ ； $x_{(0)} = x_{(1)}$ ； $x_{(n+1)} = x_{(n)}$ 。

2) 在整个区间 $[x_{(1)}, x_{(n)}]$ ，以步长为 h 均匀划分区间 Δ 如下：

$$x_{(1)} = a_0 < a_1 < \dots < a_m < x_{(n)} \quad (7)$$

式中： m 为区间划分数。

区间 Δ 的最大样本点个数小于 $nD_{n,\theta}-1$ ，查询柯尔莫哥洛夫表可以得到 $D_{n,\theta}$ ，为给定水平 θ 下的统计量 D_n 的临界值。

3) 根据一次 B-样条曲线公式建立分布函数， $S_1(x)$ 如下：

$$S_1(x) = \begin{cases} 0, & x < a_0 \\ \sum_{i=0}^{m+1} F_n(a_i) M_2\left(\frac{x-a_0}{h} - i\right), & a_0 \leq x \leq a_{m+1} \\ 1, & x > a_{m+1} \end{cases} \quad (8)$$

式中：

$$M_2(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

一次B-样条函数构造的经验分布函数具有收敛性强、稳定性好且形式简单的特点。如图4所示，与中位秩方法相比，其构造的经验分布更接近真实分布。

2.2.2 Bootstrap 方法扩充样本

由于 Bootstrap 法仅对试验样本再抽样，其被广泛应用于样本数量小于等于 30 的小子样可靠性评估中。

假设 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为独立同分布样本，此处 X 代表理论层面的随机变量，具体计算步骤中的 x 为实际观测的样本数据。其分布函数为 $F(X)$ ， θ 为 $F(X)$ 中待确定的参数（如方差、均值等）， F_n 是通过原始样本 X 构造的抽样分布函数， $\hat{\theta}(F_n)$ 是参数的估计值，则估计误差 T_n 可以表示为

$$T_n = \hat{\theta}(F_n) - \theta \quad (10)$$

对抽样分布函数进行重采样，获得再生样本 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ ， $\hat{\theta}(F_n^*)$ 是通过 X^* 获得的 θ 估计值，此时估计误差 T_n^* 为

$$T_n^* = \hat{\theta}(F_n^*) - \hat{\theta}(F_n) \quad (11)$$

重复以上仿真操作多次，通过 T_n^* 的分布去逼近 T_n ，再抽样过程中能获得参数 θ 的一系列统计特征值。获取 Bootstrap 样本的方法分为参数法和非参数法，本文使用非参数法中的自助法^[20]。

从样本 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中等概率且有放回随机抽取数据，重复 m 次，形成一个 Bootstrap 样本数据 $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ，重复此过程即可获得多组 Bootstrap 样本。

2.2.3 样本异值点的去除

Bootstrap 法首先对经验分布函数进行抽样，以生成大量新样本。但由于一次 B-样条拟合的经验分布仍与真实分布存在差异，抽样过程中难免产生损害预测精度的异常点。失效数据表明，在概率密度较高的区间，数据更为集中，且经验分布与真实分布的偏差相对较小。基于这一特点，引入 k -means 聚类，对再生样本进行聚类并剔除异常点。

k -means 算法是当前最常用的聚类技术之一^[21]，属于原型导向的简易分区算法。该方法以对象间距离作为相似性评价指标，通过迭代将对象分为 k 个类簇，使类簇内对象相似度高，类簇间对象相似度低。由于其步骤简单且效率高，特别适用于大规模低维数据的聚类分析。

k -means 算法的具体步骤如下：

- 1) 确定聚类数 K ，选择 K 个点作为聚类中心；
- 2) 将每个样本与各聚类中心距离逐一计算，归至最近聚类中心所代表的相对簇中；
- 3) 重新计算每个簇的聚类中心，应为簇内所有样本点的均值；
- 4) 若聚类中心变化极小，或迭代次数达到预设上限，则结束算法；否则返回上述步骤继续迭代。

k -means 算法也可用以下目标函数表示为

$$\min_{\{m_k\}, 1 \leq k \leq K} \sum_{k=1}^K \sum_{x \in C_k} \pi_x \text{dist}(x, m_k) \quad (12)$$

式中： x 为待聚类的样本点； π_x 为样本点 x 的权重； m_k 为簇 C_k 的中心； dist 为样本点到聚类中心的距离函数，通常选择欧氏距离。

基于概率密度在首尾区域的显著差异，将随机生成的样本点分为五类。对均值最大和最小的类簇（见图5中的红色和橘色部分）各去除 50% 的样本点。图5展示了将标准正态分布样本通过 Bootstrap 法扩充至 100 个样本的结果。

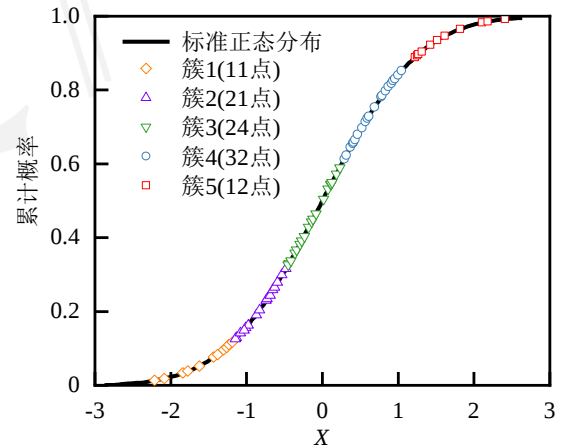


图5 k -means 聚类分析

Fig.5 k -means clustering analysis

2.2.4 寿命分布参数估计

本文采用经过 Bootstrap 方法和 k -means 聚类后的再生样本进行参数先验的计算，并使用 Bayes 方法进行后验参数估计。针对不同概率分布类型实现了相应的估计算法。

对于正态分布和指数分布，采用标准 Bayes 方法，通过计算似然函数和先验分布得到后验分布，进而估计分布参数的均值和标准差。

对于具有较强非线性特征的威布尔分布，本文采用马尔可夫链蒙特卡罗 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 方法进行参数估计。具体实现中使用 Metropolis-Hastings 算法^[22]构建马尔可夫链，通过迭代采样逼近参数的后验分布。为确保估计结果

的可靠性,算法设置了 20%的预热期用于链的收敛,并通过核密度估计方法计算先验比率,最终得到尺度参数和形状参数的后验估计值,具体步骤如图 6 所示。

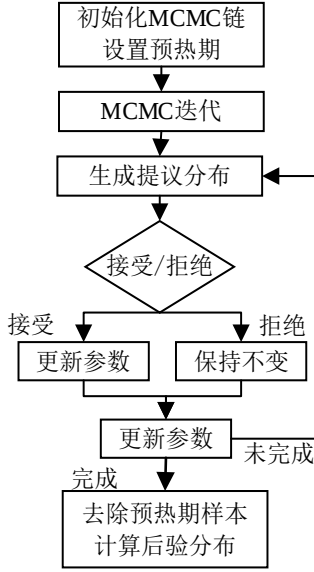


图 6 k -means 聚类分析

Fig.6 k -means clustering analysis

MCMC 算法的具体步骤如下:

1) 取威布尔参数 ($\theta=[\eta, m]$) 先验均值为初始值 $\theta_1=[\bar{\eta}_p, \bar{m}_p]$, η, m 威布尔分布的尺度参数与形状参数, $\bar{\eta}_p, \bar{m}_p$ 为分别为尺度参数与形状参数的先验均值, 设总采样数 N , 预热期 $N_b=0.2N$ 。

2) 对迭代步 $i=2 \sim N$, 基于上一轮参数生成提议分布,

$$\theta_p = \theta_{i-1} + 0.1 \cdot \sigma_p \cdot N(0,1) \quad (13)$$

式中: θ_p 为提议候选参数; σ_p 为先验分布标准差; $N(0,1)$ 为标准正态随机数。

3) 基于威布尔对数似然函数, 计算对数似然差,

$$\Delta \lg L = \lg L(\theta_p | x) - \lg L(\theta_{i-1} | x) \quad (14)$$

式中: L 为威布尔分布的似然函数。

4) 通过核密度估计, 计算先验概率比

$$\Delta \lg P = \lg P(\theta_p) - \lg P(\theta_{i-1}) \quad (15)$$

5) 按照 Metropolis-Hastings 准则, 判断接受/拒绝, 若

$$\lg u(0,1) < \Delta \lg L + \Delta \lg P \quad (16)$$

则接受, 否则保留上一轮参数。

式中: $u(0,1)$ 为 $[0,1]$ 之间的均匀随机数。

6) 迭代至 $i = N$, 剔除预热期样本, 保留 θ_{N_b} 至 θ_N 作为有效样本, 计算后验统计量, 则 $\hat{\eta}, \hat{m}$ 为最终参数估计值:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{N - N_b} \sum_{i=N_b}^N \eta_i \quad (17)$$

$$\hat{m} = \frac{1}{N - N_b} \sum_{i=N_b}^N m_i \quad (18)$$

MLE 方法是通过最大化样本出现概率来求参数, 其流程如下:

1) 对样本数据的似然函数取自然对数

$$\ln L(\eta, m) =$$

$$n \ln m - nm \ln \eta + (m-1) \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^m \quad (19)$$

式中: t_i 为第 i 个寿命试验样本的失效时间。

2) 分别对求偏导, 令偏导数为 0, 建立如下似然方程组:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta} = -\frac{nm}{\eta} + \frac{m}{\eta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \frac{n}{m} - n \ln \eta + \sum_{i=1}^n \ln t_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\eta} \right)^m \ln \left(\frac{t_i}{\eta} \right) = 0 \quad (21)$$

得到尺度参数的解析解 $\hat{\eta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{\hat{m}} \right)^{1/\hat{m}}$ 。

3) 形状参数方程无解析解, 将 $\hat{\eta}$ 代入式(20), 使用牛顿-拉夫逊法, 数值迭代求解形状参数 $\hat{m}$ 。

矩估计方法 (Method of Moments, MM) 是通过样本矩匹配总体矩来求参数, 其计算流程如下:

1) 威布尔分布的 z 阶原点矩 $E(T^z)$ 为

$$E(T^z) = \eta^z \Gamma(1 + \frac{z}{m}) \quad (22)$$

式中: T^z 为寿命样本 T 的 z 次幂。

2) 取样本 1 阶原点矩和 2 阶原点矩

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \eta \Gamma(1 + \frac{1}{m}) \\ \bar{t}^2 &= \eta^2 \Gamma(1 + \frac{2}{m}) \end{aligned} \quad (23)$$

得到关于 m 的方程

$$\Gamma(1 + \frac{2}{m}) - \frac{\bar{t}^2}{\bar{t}^2} \left(\Gamma(1 + \frac{1}{m}) \right)^2 = 0 \quad (24)$$

3) 通过数值求解, 得到 $\hat{m}$ 。将其代入式(23), 得到尺度参数 $\hat{\eta} = \bar{t} / \Gamma(1 + \frac{1}{\hat{m}})$ 。

2.2.5 寿命分布可靠度计算

对于本文涉及的 3 种寿命型分布, 其可靠度函数及可靠度置信下限如下:

1) 指数分布的可靠度函数 $R(t)$

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (25)$$

式中: t 为工作时间; λ 为失效率。

指数分布的可靠度置信下限为

$$R_L(t) = e^{-\frac{\chi_{2n,y}^2}{2\tau} t} \quad (26)$$

式中: $\chi_{2n,\gamma}^2$ 为卡方分布的下 γ 分位数, 自由度为 $2n$;

$\tau = \sum_{i=1}^n t_i$ 为总试验时间。

2) 正态分布的可靠度函数

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad (27)$$

式中: μ 为寿命均值; σ 为寿命标准差; $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累计分布函数。

正态分布的可靠度置信下限

$$\begin{aligned} R_L(t) &= 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu_L}{\sigma}\right) \\ \mu_L &= \bar{t} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \quad (28)$$

式中: μ_L 为均值的单侧置信下限; $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ 为样本均值, z_γ 为标准正态分布的上 γ 分位数。

3) 威布尔分布的可靠度函数

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right] \quad (29)$$

式中: η 为尺度参数; m 为形状参数。

威布尔分布的可靠度置信下限

$$\begin{aligned} R_L(t) &= \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta_L}\right)^m\right] \\ \eta_L &= \exp\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{1}{m\sqrt{n}}\right] \end{aligned} \quad (30)$$

式中: η_L 为特征寿命的单侧置信下限, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i$

为样本的对数均值。

2.3 系统可靠度的计算

某型号固体火箭发动机是由 m 个相互独立的子系统构成的串联系统, R_i 为第 i 个子系统的可靠度, $R_{Li,\gamma}$ 为第 i 个子系统置信度为 γ 的单侧置信下限, 其中 $i=1, 2, \dots, m$, 且各个 $R_{Li,\gamma}$ 相互独立。由系统可靠性结构可知, 系统可靠度为 $R = \prod_{i=1}^m R_i$, 则验前系统单侧置信下限为

$$R_L = \prod_{i=1}^m R_{Li,\gamma}, i=1, 2, \dots, m \quad (31)$$

置信度 $\hat{\gamma}$ 为

$$\hat{\gamma} = P[R \geq R_L] = P\left[R_1 \geq R_L / \prod_{i=2}^m R_i\right] \quad (32)$$

式中: R_1 为 $R_{Li,\gamma}$ 中最小值对应的子系统可靠度。

工程实际中, 子系统可靠度 R_i 的真值是无法获得的, 只能依据试验数据计算得到其置信度为 γ 的单侧置信下限 $R_{Li,\gamma}$ 。而 $R_L / \prod_{i=2}^m R_i$ 作为可靠度 R_1 的置信度为 $\hat{\gamma}$ 的单侧置信下限, 应满足

$$0 < R_L / \prod_{i=2}^m R_i < 1 \quad (33)$$

因此要限制可靠度 R_i ($i=2, 3, \dots, m$), 在其置信分布中的取值, 并将其中不满足的部分进行剔除。因此, 可以通过式 (34) 数值计算 $\hat{\gamma}$ 。

$$\begin{cases} \hat{\gamma} = P\{R \geq R_L\} = \frac{1}{B} \sum_{k_2=1}^M \sum_{k_3=1}^M \cdots \sum_{k_m=1}^M \tilde{\gamma}_{k_2 k_3 \cdots k_m} \\ \tilde{\gamma}_{k_2 k_3 \cdots k_m} = P\left\{R_1 \geq R_L / \prod_{i=2}^m R_{Li,\gamma_{k_i}}\right\} \\ P\left\{R_i \geq R_{Li,\gamma_{k_i}}\right\} = \gamma_{k_i} \\ \gamma_{k_i} = 1 - \frac{k_i - 0.5}{M} \\ B = \sum_{k_2=1}^M \sum_{k_3=1}^M \cdots \sum_{k_m=1}^M I(R_L / \prod_{i=2}^m R_{Li,\gamma_{k_i}} < 1) \end{cases} \quad (34)$$

式中: $k_i=1, 2, \dots, M$, M 用于控制计算精度; $i=2, 3, \dots, m$; $I(\cdot)$ 为示性函数, 当括号内的不等式成立时 $I(\cdot)=1$, 当括号内的不等式不成立时 $I(\cdot)=0$ 。

在计算时根据数值计算精度要求选取 M (如 10^4 、 10^5 等), 逐步求解 γ_{k_i} 、 $R_{Li,\gamma_{k_i}}$ 、 $\tilde{\gamma}_{k_2 k_3 \cdots k_m}$ 和 B , 得到 $\hat{\gamma}$, 设式(31)中 $\gamma = x$, 使式(34)中 $\hat{\gamma} = \gamma$ 。即可求得串联系统置信度为 x 的验前可靠度单侧置信下限为

$$R_L = \prod_{i=1}^m R_{Li,x}, i=1, 2, \dots, m \quad (35)$$

式中: $R_{Li,x}$ 为子系统可靠度置信度为 x 的置信下限。此时需要计算系统先验分布参数超参数 a 、 b 。

$$\begin{cases} \int_0^{R_L} \frac{R^{a-1}(1-R)^{b-1}}{\beta(a,b)} = 1 - x \\ \frac{a}{a+b} = \frac{R_L + 1}{2} \end{cases} \quad (36)$$

通过求解式(36), 得到先验分布参数超参数。结合系统级试验信息, 即点火次数 N 和成功次数 S , 代入式(4)和式(5), 得到系统的点估计 $\hat{R}$ 和置信度为 x 的置信下限 $\hat{R}_L$ 。

图 7 为本文提出的基于单元小样本失效数据的系统可靠度评估方法流程图, 该方法结合成败型和寿命型两种模型, 通过 Bayes 方法和改进 Bootstrap 法进行可靠度分析。

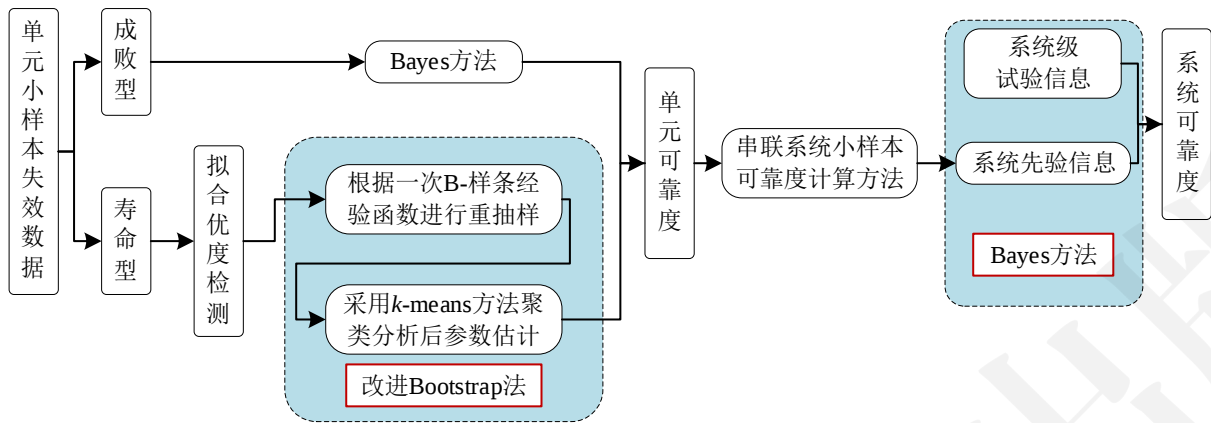


图 7 方法流程图

Fig.7 Flowchart of the proposed method

3 实例分析

3.1 固体火箭发动机单元可靠度计算

通过数值仿真验证本文提出的基于 Bootstrap 方法的参数估计有效性,生成服从威布尔分布(形状参数为 3,尺度参数为 1000)的 15 组小样本失效数据,如表 3 所示。

表 3 仿真失效时间

Table 3 Simulated failure time

序号	失效时间	序号	失效时间
1	1 862	9	1 234
2	1 015	10	1 104
3	1 331	11	351
4	1 306	12	932
5	425	13	942
6	1 132	14	656
7	542	15	612
8	733		

将本文提出的 Bootstrap 方法与 MLE 和 MM 方法进行对比分析,结果如表 4 所示。由表 4 可以看出,Bootstrap 方法得到的形状参数和尺度参数估计值分别为 2.97 (误差-1.0%) 和 1 022.35 (误差+2.24%),相比 MLE 方法和 MM 方法更接近真实参数值。

表 4 参数估计结果

Table 4 Parameter estimation results

参数	MLE	MM	Bootstrap
尺度参数	1 066.43	1 065.40	1 022.35
形状参数	2.61	2.50	2.97

图 8 为设置迭代次数为 10 000 次,去除预热期后,两参数的迭代过程,由于迭代过程趋于稳定(参数值在固定区间内),判断此时 MCMC 算法已收敛。同时图 9 表明两参数的自相关系数在置信区间范围内,表明样本独立性好,采样效率好。图 10 进一步显示了估计结果具有良好的集中性,验证了本文方法在小样本条件下具有较高的估计精度。在 $n=15$ 的

小样本条件下,Bootstrap 方法参数估计误差率稳定控制在 $\pm 5\%$ 以内,较传统方法提升 60%以上。

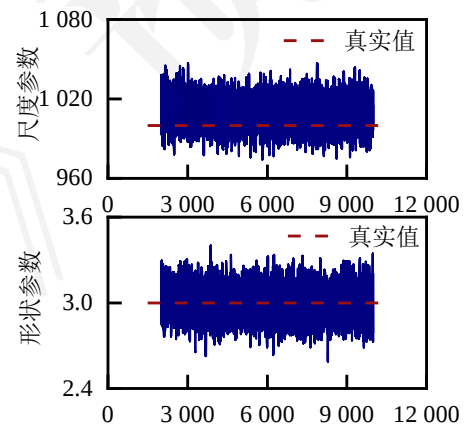


图 8 参数迭代历史

Fig.8 Iteration history of parameters

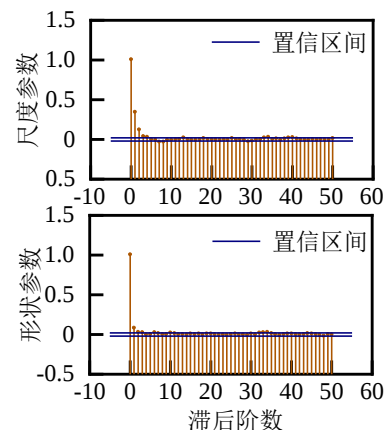
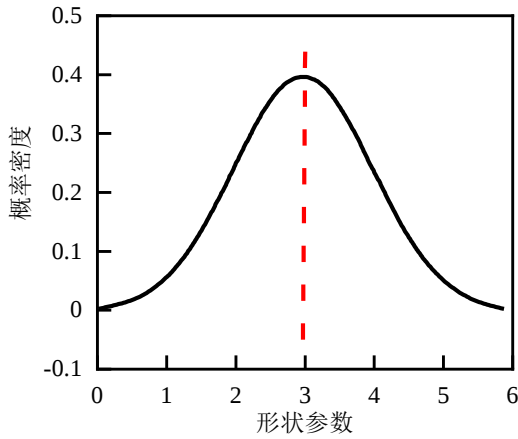
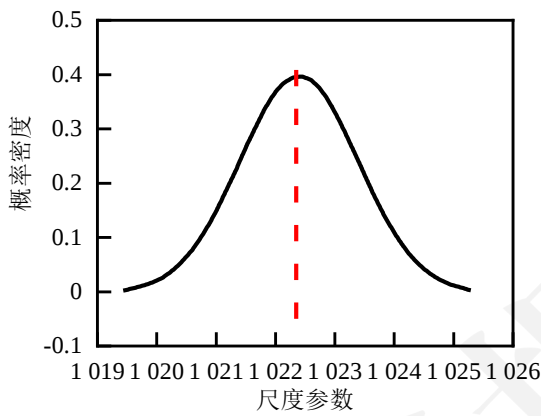


图 9 参数自相关分析

Fig.9 Parameter autocorrelation analysis



(a) 形状参数后验分布
(a) Posteriori distribution of shape parameter



(b) 尺度参数后验分布
(b) Posteriori distribution of scale parameter

图 10 后验分布图

Fig.10 Posteriori distribution

图 11 展示了 Bootstrap 方法与传统 MM 方法和 MLE 方法在不同样本量下的均方相对误差对比。结果表明，当样本量极小（约 10 个）时，3 种方法的估计误差相近且较小；但随着样本量增加至 15 个左右时，所有方法均出现显著的误差峰值，表明参数估计的准确性仍然受到样本量的制约。值得注意的是，在样本量为 20~40 的区间内，Bootstrap 方法与传统方法相比表现相当，均方相对误差维持在较低水平。特别是当样本量接近 50 时，Bootstrap 方法和 MLE 方法的误差（约 8）明显低于 MM 方法（约 15）。这一结果表明，尽管 Bootstrap 方法在小样本条件下展现出一定的优势，但其估计精度仍然依赖于样本信息的充分性。这也反映了在实际工程应用中需要权衡样本量与估计精度之间的关系。

基于以上计算结果，根据式(29)可以得到仿真单元的可靠度函数：

$$R(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{1022.35} \right)^{2.97} \right] \quad (37)$$

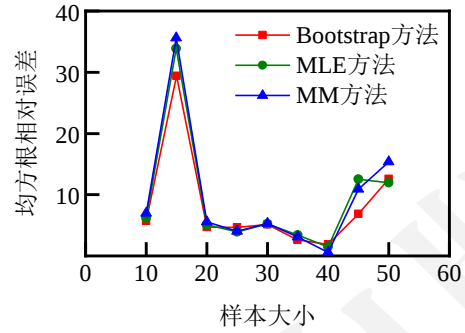


图 11 不同方法的相对误差

Fig.11 Relative errors of different methods

3.2 固体火箭发动机系统可靠度计算

表 5 为使用本文方法计算得到的发动机各单元失效形式的分布类型及参数（失效数据基于寿命加速试验模拟，样本量为 15），其中寿命型分布的特征参数单位均为小时， (η, m) 为威布尔分布的尺度参数和形状参数， (μ, σ) 为正态分布的均值和标准差， λ 为指数分布的失效率， (η, s) 为二项分布的试验数和成功数。

表 5 各单元失效形式分布类型及参数

Table 5 Failure mode distribution types and parameters of components

单元可靠度	分布形式	特征参数
R_1	二项分布	$n=50, s=50$
R_2	威布尔分布	$\eta=36\ 555, m=4.1$
R_3	正态分布	$\mu=10\ 900, \sigma=733$
R_4	正态分布	$\mu=14\ 214, \sigma=1\ 617$
R_5	威布尔分布	$\eta=49\ 535, m=3.2$
R_6	指数分布	$1/\lambda=186\ 431$
R_7	正态分布	$\mu=15\ 512, \sigma=2\ 351$
R_8	威布尔分布	$\eta=57\ 400, m=2.9$
R_9	二项分布	$n=35, s=35$
R_{10}	二项分布	$n=40, s=39$

通过计算可以得到表 6 所示各单元在 $t=8\ 000\ h$ 时的可靠度点估计，以及对置信度为 0.95 的置信下限结果。

表 6 各单元可靠度结果

Table 6 Reliability results of components

单元	点估计	置信下限	单元	点估计	置信下限
R_1	0.990 1	0.979 5	R_6	0.965 3	0.958 0
R_2	0.998 0	0.965 1	R_7	0.999 3	0.955 9
R_3	0.999 9	0.985 7	R_8	0.996 7	0.974 8
R_4	0.999 9	0.982 8	R_9	0.986 1	0.971 6
R_5	0.997 1	0.972 4	R_{10}	0.975 0	0.953 1

根据表 6 的单元可靠度数据，结合系统级试验信息，即点火次数 $N=10$ 和成功次数 $S=10$ ，进行系

统可靠度的计算。置信度为 0.95 的系统置信下限结果如表 7 所示。

通过表 7 所示的计算结果可知, 4 种方法对系统可靠度的估计值存在显著差异。本文方法得到的可靠度置信下限最高, 为 0.849 3; 其次是采用 Jeffreys 假设的传统 Bayes 方法, 可靠度下限为 0.837 2。由于样本量的限制, 得到了较为保守的结果; 文献[18]方法的可靠度下限为 0.808 0, 忽略了系统级成败试验, 导致误差较大; 而 LM 方法得到的可靠度下限最低, 为 0.736 1, 其在小样本情况下几乎无法满足置信度要求。

表 7 系统可靠度置信下限

Table 7 Lower confidence bound of system reliability

LM 法	文献[18]方法	传统 Bayes 方法	本文方法
0.736 1	0.808 0	0.837 2	0.849 3

4 结论

针对小样本试验条件下固体火箭发动机串联系统多失效模式并存、组件试验数据与系统级试验信息融合效率偏低的工程问题, 本文对小样本固体火箭发动机系统可靠度评估方法进行了研究。得到主要结论如下:

1) 本文提出了一种基于改进 Bootstrap 方法的参数估计方法, 通过 B-样条函数构造经验分布函数, *k*-means 聚类去除异值点, 实现了对小样本寿命数据的有效处理。仿真结果显示, 该方法在小样本条件下的参数估计精度优于传统的最大似然估计和矩估计方法。

2) 建立了包含成败型和寿命型两种模型的系统可靠度评估框架。通过改进 Bootstrap 方法计算单元可靠度, 结合系统可靠性结构分析, 实现了系统级可靠度的评估。实例分析表明, 该方法得到的系统可靠度置信下限为 0.849 3, 相比于传统 LM 方法的 0.736 1 有显著提高。

3) 通过实例验证, 本文提出的方法能够有效处理小样本数据, 在保证评估精度的同时避免了过度保守。与传统 Bayes 方法相比, 考虑了子系统试验数据的影响, 评估结果更加合理。

综上所述, 本文为小样本固体火箭发动机系统的可靠度评估提供了一种实用的方法, 未来将继续探索在实际工程中的应用, 以便不断完善和优化评估方法。

参考文献 (References)

[1] 王有元. 基于 Bayes 方法及其改进的无失效数据和小子样产品可靠性评估[D]. 成都: 电子科技大学, 2022.
WANG Y Y. Reliability evaluation of the products with zero-

failure data and small sample based on bayes method and its improvement[D].Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2022. (in Chinese)

[2] 刘海涛, 张志华, 董理.成败型产品可靠性的 Bayes 验收方案研究[J].兵工学报, 2016, 37(3): 565-569.
LIU H T, ZHANG Z H, DONG L. Bayesian acceptance test scheme for reliability of binomial products[J].Acta Armamentarii, 2016, 37(3): 565-569. (in Chinese)

[3] WILSON A G, FRONCZVK K. Bayesian reliability: combining information[J]. Quality Engineering, 2017, 29(1): 119-129.

[4] 王博, 蒋平, 郭波. 基于多源信息融合的航天阀门可靠性评估[J]. 兵工学报, 2022, 43(1): 199-206.
WANG B, JIANG P, GUO B. Reliability evaluation of aerospace valves based on multi-source information fusion[J]. Acta Armamentarii, 2022, 43(1): 199-206. (in Chinese)

[5] HUANG J D, HUANG Z Y, ZHAN X. Research on three-state reliability evaluation method of high reliability system based on multi-source prior information[J]. PeerJ Computer Science, 2023, 9: e1439.

[6] CHENG T T, WANG X, LIU X T, et al. Uncertainty-based reliability analysis of cutters via improved Bayesian prior distribution[J]. Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 2025, 49(2): 220-228.

[7] AMALNERKAR E, LEE T H, LIM W. Reliability analysis using bootstrap information criterion for small sample size response functions[J] Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 62(6): 2901-2913.

[8] 张震, 刘俭辉, 赵成, 等. 基于 Bootstrap 的小样本可靠性评估方法[J]. 兰州理工大学学报, 2022, 48(1): 39 -44.
ZHANG Z, LIU J H, ZHAO C, et al. A small sample reliability assessment method based on bootstrap[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2022, 48(1): 39 -44. (in Chinese)

[9] 刘帼巾, 王泽, 李想, 等. 基于改进 Bootstrap-Bayes 的电子式剩余电流动作断路器可靠性评估[J]. 电工技术学报, 2022, 37(16): 4250-4258.
LIU G J, WANG Z, LI X, et al. Reliability evaluation of electronic residual current operated circuit breakers based on improved bootstrap-Bayes[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2022, 37(16): 4250-4258. (in Chinese)

[10] 韩思杰, 王海清, 郑威, 等. 多重定时截尾数据下石化安全设备可靠度估计[J]. 计算机集成制造系统, 2023, 29(4): 1107-1114.
HAN S J, WANG H Q, ZHENG W, et al. Reliability estimation

- for petrochemical safety devices under multiple timing censored data[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2023, 29(4): 1107-1114. (in Chinese)
- [11] YOU D Z, LIU S, LI F K, et al. Reliability assessment method based on small sample accelerated life test data[J]. Eksploatacja I Niezawodność–Maintenance and Reliability, 2025, 27(1): 192-170.
- [12] WANG B X. Unbiased estimations for the exponential distribution based on step-stress accelerated life-testing data[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173(2): 1227-1237.
- [13] 汤礼东, 宋保维, 李正, 等. 基于信息熵理论的小子样模糊可靠性评定方法[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(1): 214-216.
- TANG L D, SONG B W, LI Z, et al. A fuzzy reliability evaluation method for sub-sample products based on information entropy theory[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2005, 25(1): 214-216. (in Chinese)
- [14] LI Z A, FU H M, WU Q. Reliability assessment for a spacecraft landing buffer mechanism based on small sample data[J]. Machines, 2023, 11(9): 917.
- [15] ZHANG Y Z, HAN F, YANG F, et al. Reliability analysis of small-sample failure data for random truncation high-voltage relay[J]. Applied Sciences, 2024, 14(11): 4950.
- [16] 李学京. 置信分布的贝塔分布近似及其在可靠性统计中的应用[J]. 强度与环境, 2007, 34(2): 17-23.
- LI X J. Beta distribution approximation of confidence distributions and application in reliability statistics[J]. Structure & Environment Engineering, 2007, 34(2): 17-23. (in Chinese)
- [17] 冯志刚, 李静, 高普云, 等. 贝塔分布在数据转换中的应用及其优化分布参数确定[J]. 机械强度, 2011, 33(4): 554-557.
- FENG Z G, LI J, GAO P Y, et al. Application of beta distribution in data convert and its optimize parameter ascertain[J]. Journal of Mechanical Strength, 2011, 33(4): 554-557. (in Chinese)
- [18] 傅惠民, 李子昂, 郭建超. 串联系统小样本可靠度直接评估方法[J]. 机电产品开发与创新, 2024, 37(4): 1 -5.
- FU H M, LI Z A, GUO J C. Direct assessment method for series system reliability based on small sample data[J]. Development & Innovation of Machinery & Electrical Products, 2024, 37(4): 1 -5. (in Chinese)
- [19] 孙权, 周星, 冯静, 等. 寿命分布的参数 Bootstrap 拟合优度检验方法[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(6): 112 -116.
- SUN Q, ZHOU X, FENG J, et al. Goodness-of-fit test for life distributions based on parametric bootstrap[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36 (6): 112 -116. (in Chinese)
- [20] 孔丹莉, 丁元林. 非参数 bootstrap 方法及其应用[J]. 数理医药学杂志, 2006, 19(3): 232-233.
- KONG D L, DING Y L. Non-parametric bootstrap method for validation stabilities of parameters of statistical model[J]. Journal of Mathematical Medicine, 2006, 19(3): 232-233. (in Chinese)
- [21] 王森, 刘琛, 邢帅杰. K-means 聚类算法研究综述[J]. 华东交通大学学报, 2022, 39(5): 119-126.
- WANG S, LIU C, XING S J. Review on k-means clustering algorithm[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2022, 39(5): 119-126. (in Chinese)
- [22] LIANG F M, KIM J S, SONG Q F. A bootstrap metropolis-hastings algorithm for bayesian analysis of big data[J]. Technometrics, 2016, 58(3): 304-318.