



DOI: 10.12382/bgxb.2025.0824

# 基于贝叶斯理论的小样本空空导弹三维制导精度评估

宁小磊\*

(63870 部队, 陕西 华阴 714200)

**摘要:** 导弹精度鉴定试验受成本限制, 实弹射击样本量较小, 导致经典统计方法估计精度偏低, 且现有研究多局限于二维平面, 难以满足武装直升机载空空导弹三维精度实战化考核评估的实际需求。为此, 从三维位置误差分量独立同正态分布的一般性假设出发, 提出一种基于贝叶斯理论的小样本空空导弹三维制导精度评估方法。首先定义反映空空导弹空间作战实际脱靶特性的三维脱靶量, 并在理论上确认其统计分布模型的基础上, 建立了三维脱靶量  $r$  与位置散布参数  $\sigma$  的函数关系; 然后选取逆伽马分布作为精度特征参数的共轭先验, 通过融合先验信息与现场实弹脱靶量实测试验数据, 求解导弹三维误差分量散布参数的后验分布, 从而实现导弹三维制导精度的贝叶斯点估计与区间估计。实例验证结果表明, 该方法能够显著提升制导精度估计结果的准确性与稳健性, 为计算小样本条件下的直升机载空空导弹三维制导精度提供了参考依据。

**关键词:** 武装直升机载空空导弹; 小样本; 三维脱靶量; 麦克斯韦-玻尔兹曼分布; 贝叶斯方法

**中图分类号:** TJ760

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-1093(202x)xx-250824-9

## Three-Dimensional Guidance Accuracy Evaluation of Air-to-Air Missiles under Small Sample Conditions Based on Bayesian Theory

NING Xiao-lei\*

(Unit 63870 of the PLA, Huayin 714200, Shaanxi, China)

**Abstract:** Missile accuracy qualification tests are often constrained by high costs, resulting in small sample sizes of live-fire tests and low estimation accuracy of classical statistical methods. Moreover, existing studies are mostly confined to two-dimensional plane analysis, which fails to meet the practical requirements of three-dimensional combat evaluation for helicopter-borne air-to-air missiles. To address this issue, based on the general assumption that the three-dimensional position error components are independent and identically normally distributed, a Bayesian method for evaluating the three-dimensional guidance accuracy of air-to-air missiles under small sample conditions is proposed. First, the three-dimensional miss distance, which reflects the actual spatial miss characteristics in air-to-air combat, is defined, and its statistical distribution model is theoretically confirmed; on this basis, the functional relationship between the three-dimensional miss distance  $r$  and the position dispersion parameter  $\sigma$  is established. Then, the inverse gamma distribution is selected as the conjugate prior for the accuracy characteristic parameters. By integrating prior information with field live-fire miss distance test data, the posterior distribution of the dispersion parameter is obtained, thereby achieving Bayesian point estimation and interval estimation of the three-dimensional guidance accuracy of missiles. The example verification results show that the proposed method significantly improves the accuracy and robustness of guidance accuracy estimation, providing a reference for calculating the three-dimensional guidance accuracy of helicopter-borne air-to-air missiles under small sample conditions.

**Keywords:** helicopter-borne air-to-air missile; small sample; three-dimensional miss distance; Maxwell-Boltzmann distribution; Bayesian method

### 0 引言

在武装直升机空空导弹鉴定定型试验中, 制导

精度评估历来备受重视<sup>[1-2]</sup>, 传统试验方法主要依据现场实弹飞行试验和经典数理统计理论进行。但随

收稿日期: 2025-09-08

基金项目: 基础加强计划重点基础研究项目(2020-JCJQ-ZD-076-00)

\*通信作者邮箱: 1029317670@qq.com

着导弹单子样价格的日益昂贵,能够获取的现场实弹数据越来越少<sup>[3-5]</sup>,若仍采用传统试验与评估方法,存在指标评估精度不高的问题<sup>[6-7]</sup>。更重要的是,武装直升机空空导弹的作战空域为三维空间,而现有评估方法多基于二维平面假设,无法真实反映其在三维空间中的实际脱靶特性<sup>[4-5]</sup>。

当前对于导弹精度评估方法的研究存在两方面局限:一是多数研究集中于二维靶平面内的误差分析<sup>[8-9]</sup>,其方法与结论主要适用于火炮、弹药等地面武器的落点散布评估<sup>[10]</sup>,难以直接推广至机载空空导弹这类三维空间中的制导精度评价;二是评估机载空空导弹射击精度时,现有研究方法主要利用命中与未命中二值信息进行成败型统计<sup>[11]</sup>,未能充分利用靶场实测的连续型脱靶量数据,在小样本条件下决策风险更大<sup>[12]</sup>。以上局限表明,建立适用于三维空间、能够充分利用连续型数据的导弹精度评估方法,已成为当前试验领域亟待解决的重要问题。

因试验成本日益昂贵,实弹打靶试验次数越来越少,导致传统频率学派统计方法估计方差较大<sup>[13-15]</sup>。幸运的是在鉴定试验前,通常已积累大量先验信息,如蒙特卡洛数字仿真、硬件在环仿真、历史型号经验及专家知识<sup>[16]</sup>,这些信息在传统框架下难以被有效利用。贝叶斯理论通过将未知参数视为随机变量,提供了一个将先验信息与试验样本信息进行有效融合的严谨数学框架<sup>[17-18]</sup>。文献[6]基于贝叶斯理论提出将仿真系统的可信度建模为先验信息,进而与少量实弹试验数据相融合,实现对多管火箭系统射击精度的低代价、高置信度推断;文献[19]研究了基于正态-逆伽马分布的反巡航导弹命中概率估计方法,利用贝叶斯理论解决了弹药射击试验次数较少而带来的小样本条件下弹药需求预计问题;文献[20]研究了基于正态-逆威沙特分布的地空导弹命中概率贝叶斯估计方法,解决了射弹散布两向相关的导弹命中概率估计问题,使得方法适用性更强;文献[8, 21]研究了基于等效样本和实仿融合的现场小子样试验制导精度评估方法,解决小样本条件下圆概率偏差(Circular Error Probable, CEP)评估精度问题。以上文献尝试通过融合仿真数据等先验信息改善小子样条件下的导弹命中精度评估效果<sup>[22-23]</sup>,然而这些方法的研究对象主要限定在二维靶平面内,研究方法不能直接推广应用于机载空空导弹这类三维空间制导精度场景。

为此,本文从小样本、三维随机变量各分量独立同正态分布的一般性假设条件出发,提出一种基于贝叶斯理论的小样本空空导弹三维制导精度评估方法。首先在确认三维脱靶量服从麦克斯韦-玻尔兹

曼(Maxwell-Boltzmann, MB)分布的基础上,建立三维脱靶量 $r$ 与散布参数 $\sigma$ 的函数关系,克服现有方法二维平面分析的不足;然后选用逆伽马分布作为共轭先验,融合先验信息与现场样本信息,建立三维空间中导弹制导精度的统计推断方法,给出后验分布闭合解及区间估计的精确计算公式;最后以武装直升机空空导弹为典型应用实例,验证方法的有效性与工程实用性。本文方法为小样本条件下各类导弹武器三维射击精度评估提供了通用的理论框架与工程实现路径,有效解决了经典方法估计精度偏低的问题,具有重要的理论意义和工程应用价值。

## 1 导弹三维脱靶量分布理论

### 1.1 导弹三维脱靶量表示

脱靶量是衡量导弹射击精度的关键参数,从实战化考核的角度讲,定义为在给定的交战条件下,导弹弹头最终爆炸点与预定命中点之间接近程度的度量。它直接反映了“打得准不准”的最终效果,是导弹相对于运动目标交会过程中的最小距离,又称为脱靶距离,原理如图1所示<sup>[2]</sup>。该脱靶量是在三维几何空间中定义的导弹射弹散布,全面反映了真实三维空间中的弹目相对位置偏差,称之为三维空间脱靶量。图1中 $O'$ 为平均弹着点, $\sigma$ 为分量标准差, $r$ 为三维脱靶量, $(X, Y, Z)$ 表示三维误差分量,根据弹目三维空间内的相对几何关系有 $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 。

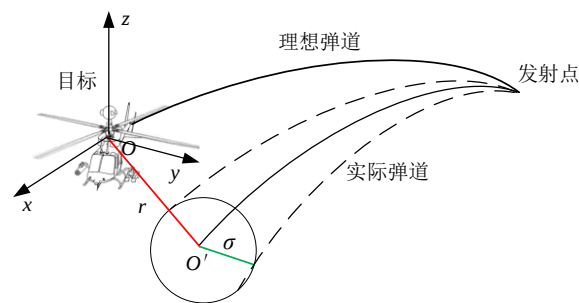


图1 导弹脱靶量示意图

Fig.1 Schematic diagram of miss distance for missile

### 1.2 导弹三维脱靶量分布理论

当一个二维随机向量的两个分量服从零均值、同方差的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 时,该向量的模服从瑞利分布<sup>[12]</sup>。对于空空导弹这类三维脱靶量 $r$ 的分布函数,文献[24]推导给出了其统计分布模型,这是导弹武器三维精度统计推断首先需要解决的理论问题。

**定理1** 三维脱靶量 $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 服从MB分布,其概率密度函数(Probability Density Function, PDF)为<sup>[24]</sup>

$$f_R(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), r \geq 0 \quad (1)$$

其中  $(X, Y, Z)$  相互独立, 且均服从零均值、同方差的正态分布  $N(0, \sigma^2)$ 。

**证明** 在三维误差分量  $(X, Y, Z)$  相互独立且均服从  $N(0, \sigma^2)$  的前提下, 其联合概率密度函数是三个边缘密度函数的乘积, 即

$$\begin{aligned} f_{X,Y,Z}(x,y,z) &= f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-x^2/2\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-y^2/2\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-z^2/2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

将式(2)转换为球坐标系  $(r, \theta, \phi)$ , 其中方向由极角  $\theta$  和方位角  $\phi$  描述,  $\theta \in [0 \text{ rad}, \pi \text{ rad}]$ ,  $\phi \in [0 \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}]$ ,  $r \geq 0 \text{ m}$ 。直角坐标系和球坐标系的转换关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (3)$$

由直角坐标下到球坐标系下, 体积元变换为

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (4)$$

$\det(\mathbf{J}) = r^2 \sin \theta$  是变换的雅可比行列式的绝对值, 代表了体积元在变换中的伸缩比例。

将式(3)代入式(2), 则得到  $(r, \theta, \phi)$  联合概率密度函数:

$$f(r, \theta, \phi / \sigma) = f(r, \theta, \phi) \det(\mathbf{J}) = \frac{r^2 \sin \theta}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5)$$

式(5)描述的是在  $(r, \theta, \phi)$  处的概率密度, 为了求在球坐标体积元  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  内的概率, 需要进一步将这个密度乘以体积元:

$$\begin{aligned} P &\approx f(r, \theta, \phi) dV = \\ &f(r, \theta, \phi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \end{aligned} \quad (6)$$

进一步对角度极角  $\theta$  和方位角  $\phi$  积分, 得到  $r$  的边缘概率密度函数:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(r, \theta, \phi) d\theta d\phi = \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

整理式(7)后, 可得

$$f_R(r) = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

证毕。

### 1.3 三维脱靶量分布特性

式(7)即为导弹三维脱靶量  $r$  的 PDF, 分析后发现其与式(9)所示 MB 分布形式完全相同<sup>[25]</sup>, 仅参数替换 ( $\sigma^2 \leftrightarrow k_B T / m$ ):

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) \quad (9)$$

式中:  $m$  为质量;  $k_B$  为玻尔兹曼常量;  $T$  为温度。这一发现将物理学的分子速率分布与导弹脱靶量的空间散布建立了数学同构, 揭示了三维各向同性正态误差下脱靶量的内在统计规律。

式(7)中  $\sigma$  是唯一的分布参数, 决定分布的集中程度,  $\sigma$  越小, 数据越集中。图2给出了分布参数  $\sigma = 1.54 \text{ m}$  时三维脱靶量  $r$  的 PDF 示意图。

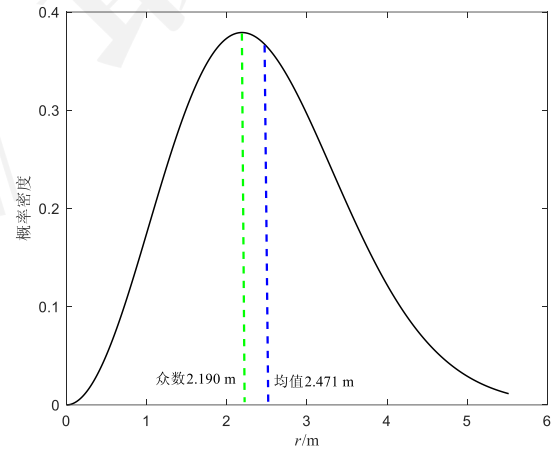


图2 脱靶量 ( $\sigma=1.54\text{m}$ ) PDF

Fig.2 Schematic diagram of miss distance ( $\sigma=1.54\text{m}$ ) PDF

获得  $r$  的 PDF 后, 便可以从统计理论上分析三维脱靶量  $r$  的分布规律及其统计特征。根据定理1, 有  $r \sim MB(\sigma)$ , 则其均值  $E(r)$  为

$$E(r) = \int_0^{\infty} r f_R(r) dr = \sqrt{8/\pi} \sigma = 1.5958 \sigma \quad (10)$$

方差  $\text{VAR}(r)$  为

$$\begin{aligned} \text{VAR}(r) &= \int_0^{\infty} r^2 f_R(r) dr - \left(\int_0^{\infty} r f_R(r) dr\right)^2 = \\ &3\sigma^2 - \frac{8}{\pi} \sigma^2 = \left(3 - \frac{8}{\pi}\right) \sigma^2 \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10)可见, 三维脱靶量  $r$  与误差分量标准差  $\sigma$  呈现线性函数关系, 因此为估算  $r$ , 可首先估算  $\sigma$ , 然后由式(10)反算得到  $r$  估计值。

## 2 导弹三维射击精度的贝叶斯推断

### 2.1 总体框架

为解决小样本信息带来的评估问题, 本文采取贝叶斯方法推断导弹三维精度的参数。贝叶斯统计推断的基本原理是根据先验分布与样本信息得到后验分布, 推断过程如下<sup>[8,26]</sup> :

$$\pi(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta} p(D|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (12)$$

式中:  $\pi(\theta|D)$  为后验分布;  $\pi(\theta)$  为先验分布;  $p(D|\theta)$  为样本信息;  $\int_{\theta} p(D|\theta)\pi(\theta)d\theta$  为边缘密度函数;  $D$  为样本。总体而言, 先验分布  $\pi(\theta)$  反映的是抽样前对  $\theta$  的认识, 后验分布  $\pi(\theta|D)$  反应的则是抽样后对  $\theta$  的认识, 其差异是由于样本  $D$  出现后对  $\theta$  认识的调整。因此后验分布  $\pi(\theta|D)$  可以看作是用总体信息和样本信息对先验分布  $\pi(\theta)$  作调整的结果。用框图表示贝叶斯方法如图 3 所示<sup>[8]</sup>。

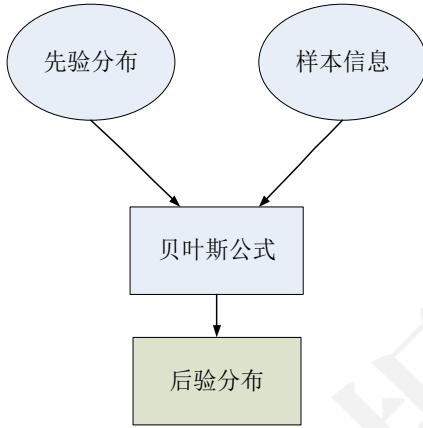


图 3 贝叶斯原理示意图

Fig.3 Bayesian principle diagram

## 2.2 制导精度参数的先验信息

贝叶斯统计推断为解决小样本试验评估问题提供了良好思路, 应用贝叶斯理论可综合利用总体信息、先验信息和现场样本信息, 依据少量现场样本实现对导弹精度参数的估计, 从而克服实弹射击试验次数较少带来的信息量不足问题。

在贝叶斯统计推断中, 先验分布的确定是一个重要且需要谨慎处理的问题。目前脱靶量参数  $r$  尚没有现成可有的先验分布函数, 但根据式 (10) 和 MB 分布函数形式可知, 确定了  $\sigma$  值便可计算得到  $r$  值, 因此在导弹制导精度贝叶斯推断中可选择推断参数  $\sigma$ 。因贝叶斯理论将未知参数视为随机变量而不是确定值, 可先假设  $\sigma \sim h(\sigma)$ 。

考虑到正态方差 (或 MB 分布尺度参数) 的共轭先验是逆伽马分布, 这能保证后验分布具有相同的解析形式, 极大简化计算, 因此为了数学上的便利和便于求解, 本文采用共轭先验分布法确定先验分布。由于  $D \sim N(0, \sigma^2)$ , 对于正态分布的方差

$\sigma^2$ , 其共轭先验是逆伽马分布  $IG(\alpha_0, \beta_0)$ , 其中  $\alpha_0$ 、 $\beta_0$  为先验分布待定的超参数。因为  $\sigma > 0$ , 因此可通过  $\sigma^2$  唯一确定  $\sigma$ 。其实也可以直接为  $\sigma$  选择缩放的逆卡方分布或逆伽马分布, 推导过程类似, 只是推导过程更复杂。假设  $\sigma^2$  的先验分布为逆伽马分布  $IG(\alpha_0, \beta_0)$ , 即令  $\lambda = 1/\sigma^2$ , 则其 PDF 如下:

$$P(\lambda) = \text{Gamma}(\lambda; \alpha_0, \beta_0) = \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda^{\alpha_0+1} \exp(-\beta_0 \lambda) \quad (13)$$

式(13)中的先验超参数  $\alpha_0$ 、 $\beta_0$  可以通过等效样本量法或矩估计法确定:

1) 等效样本量法<sup>[8,16]</sup>。通过历史数据、仿真结果或专家经验来设定, 如果基于历史数据估计的精度方差约为  $S_0$ , 且该估计的精度相当于  $n_0$  个虚拟等效样本, 相当于先验等效于  $n_0$  试验, 其样本二阶矩为  $S_0$ , 则有  $\alpha_0 = n_0 / 2$ ,  $\beta_0 = S_0 \cdot n_0 / 2$ 。

2) 矩估计法。根据历史信息, 设定先验均值  $E(\sigma^2)$  和先验方差值  $\text{VAR}(\sigma^2)$ , 然后通过解方程  $E(\sigma^2) = \beta_0 / (\alpha_0 - 1)$ 、 $\text{VAR}(\sigma^2) = \beta_0^2 / (\alpha_0 - 1)^2 (\alpha_0 - 2)$  计算求得  $\alpha_0$ 、 $\beta_0$ 。

如果没有任何先验信息可用, 使用 Jeffreys 法确认无信息先验分布。参数  $\sigma^2$  的 Jeffreys 先验定义为  $\pi(\sigma^2) \propto \sqrt{\det I(\sigma^2)}$ ,  $I(\sigma^2)$  是 Fisher 信息矩阵, 其元素为

$$I_{ij}(\sigma^2) = -E_{r/\sigma^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \sigma_i^2 \partial \sigma_j^2} \log f(r/\sigma^2) \right] \quad (14)$$

**定理 2** 对于 MB 分布  $f(r/\sigma)$ , 其尺度参数  $\sigma$  的 Jeffreys 先验为  $1/\sigma$ 。

**证明** 首先计算关于  $\sigma$  的对数似然函数的 1 阶和 2 阶导数。由式(1)可得对数似然函数  $l(\sigma)$  为

$$l(\sigma) = \ln(f(r/\sigma)) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\pi} + 2 \ln r - 3 \ln \sigma - \frac{r^2}{2\sigma^2} \quad (15)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial \sigma} = -\frac{3}{\sigma} - \frac{r^2}{\sigma^3} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} = \frac{3}{\sigma^2} - \frac{3r^2}{\sigma^4} \end{cases} \quad (16)$$

计算 Fisher 信息量:

$$I(\sigma) = -E\left[\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2}\right] = -E\left[\frac{3}{\sigma^2} - \frac{3r^2}{\sigma^4}\right] = -\frac{3}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4}E[r^2] \quad (17)$$

根据定义  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，且  $X, Y, Z$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ 。代入式(17)，可得

$$I(\sigma) = -\frac{3}{\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^4} \cdot 3\sigma^2 = \frac{6}{\sigma^2} \quad (18)$$

因此，Jeffreys 先验为

$$\pi(\sigma) \propto \sqrt{\det I(\sigma^2)} = \sqrt{\frac{6}{\sigma^2}} \propto \frac{1}{\sigma} \quad (19)$$

证毕。

以上给出了有先验信息 and 无先验信息利用两种情况下，贝叶斯估计时先验分布的确定方法。

### 2.3 现场样本的似然函数

设  $r_1, r_2, \dots, r_n$  是来自  $MB(\sigma)$  的独立同分布样本，则样本联合 PDF 为各样本 PDF 的乘积，即

$$L(\sigma^2 / r) = f(r_1, r_2, \dots, r_n / \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(r_i / \sigma^2) = \quad (20)$$

$$\prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r_i^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right) \right)$$

合并简化式 (20)，可得

$$L(\sigma^2 / r) \propto (1/\sigma^{3n}) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n r_i^2\right) \cdot \prod_{i=1}^n r_i^2 \quad (21)$$

令  $T = \sum_{i=1}^n r_i^2$ ，是所有径向距离的平方和，并忽略与参数  $\sigma$  无关的常数项和  $\prod_{i=1}^n r_i^2$ ，得到似然函数核：

$$L(\sigma / r) \propto (\sigma)^{-3n} \cdot \exp\left(-\frac{T}{2\sigma^2}\right) \quad (22)$$

为了后续推导方便，进行变量代换，令  $\theta = \sigma^2$ ，则关于  $\theta$  的似然函数可以写为

$$L(\sigma / r) \propto (\theta)^{-3n/2} \cdot \exp\left(-\frac{T}{2\theta}\right) \quad (23)$$

为估计导弹制导精度，统计外场实弹射击试验的脱靶量  $r_i, i=1, 2, \dots, n$ ， $n$  为发射总数，则可以求出

$$\text{参数 } T = \sum_{i=1}^n r_i^2。$$

对于外场实弹射击试验数量较少的情况，仅依靠样本数据得到的参数估计值误差较大。

### 2.4 制导精度参数的后验分布

贝叶斯方法将总体信息、先验信息和样本信息进

行融合，得到了导弹射弹散布参数后验分布。相比只依靠样本信息的经典统计方法，贝叶斯方法考虑了先验信息，因此利用信息更加充分。

根据贝叶斯定理，后验分布  $\pi(\sigma^2 / r)$  与先验分布和似然函数的乘积呈正比，即

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 / r) &\propto \pi(\sigma^2) \cdot L(\sigma^2 / r) \propto \\ &(\sigma^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\sigma^2}\right) \cdot (\sigma^2)^{-3n/2} \exp\left(-\frac{T}{2\sigma^2}\right) \propto \\ &(\sigma^2)^{-(\alpha_0+1+3n/2)} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(\beta_0 + \frac{T}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (24)$$

观察上述形式，式(24)正好是逆伽马分布的核，因此，后验分布  $\pi(\sigma^2 / r)$  也是逆伽马分布

$IG(\alpha_n, \beta_n)$ ，后验形状参数为  $\alpha_n = \alpha_0 + 3n/2$ ，后验

尺度参数为  $\beta_n = \beta_0 + \frac{T}{2} = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2$ ，则有

$$\sigma^2 / r \sim IG\left(\alpha_0 + \frac{3n}{2}, \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2\right) \quad (25)$$

由式(25)可见，后验形状参数  $\alpha_n$  是先验形状参数  $\alpha_0$  加上  $3n/2$ ，这里的  $3n/2$  反映了三维数据的特性。后验尺度参数  $\beta_n$  是先验尺度参数  $\beta_0$  加上  $\sum_{i=1}^n r_i^2/2$ ，其中  $\sum_{i=1}^n r_i^2$  衡量了所有弹着点相对于目标中心的总散布程度，是样本信息的体现。

在获得数据  $r$  后，精度参数方差  $\sigma^2$  的后验分布为  $IG(\alpha_n, \beta_n)$ ，其完整的贝叶斯积分公式为

$$\begin{aligned} \pi(\sigma^2 / r) &= \frac{\pi(\sigma^2) p(r | \sigma^2)}{\int_{\Omega} \pi(\sigma^2) p(r | \sigma^2) d\sigma^2} = \\ &\frac{\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} (\sigma^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp(-\beta_0 / \sigma^2) \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r_i^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right) \right)}{\int_{\Omega} \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} (\sigma^2)^{-(\alpha_0+1)} \exp(-\beta_0 / \sigma^2) \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{r_i^2}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}\right) \right) d\sigma^2} \\ &= \frac{\left( \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{(\alpha_0+n)}}{\Gamma(\alpha_0+n)} (\sigma^2)^{-(\alpha_0+1+3n/2)} \exp\left(-\left( \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) / \sigma^2\right) \\ &= \frac{\left( \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{(\alpha_0+n)}}{\Gamma(\alpha_0+n)} \sigma^{-(\alpha_0+1+3n/2)} \exp\left(-\left( \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right) / \sigma^2\right) d\sigma^2 \end{aligned} \quad (26)$$

式中： $\Omega$  为  $\sigma^2$  的取值范围。

### 2.5 制导精度的贝叶斯估计

制导精度的贝叶斯估计是基于后验分布进行的，

按照平方损失最小原则,选取参数 $\sigma^2$ 的验后期望估计 $\hat{\sigma}_E^2$ 作为贝叶斯估计值,此时估计的验后均方差 MS 等于验后方差,即 $MSE(\hat{\sigma}_E^2/r) = D(\sigma^2/r)$ 。

依据逆伽马分布性质,若 $\sigma^2 \sim IG(\alpha_n, \beta_n)$ ,则其验后均值 $\hat{\sigma}_E^2$ 和方差为

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_E^2 = E(\sigma^2) = \frac{\beta_n}{\alpha_n - 1} \\ \text{Var}(\sigma^2) = \frac{(\beta_n)^2}{(\alpha_n - 1)^2(\alpha_n - 2)} \end{cases} \quad (27)$$

由于验后期望估计是使得验后均方差达到最小的估计,因此取验后期望 $\hat{\sigma}_E^2$ 作为贝叶斯估计。

式(27)是导弹散布参数后验期望估计,将后期期望估计值代入式(11),得到导弹脱靶量估计值 $\hat{r}_E$ :

$$\hat{r}_E = \sqrt{8/\pi} \hat{\sigma}_E = 1.5958 \hat{\sigma}_E = 1.5958 \sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n - 1}} \quad (28)$$

与经典统计方法的区间估计相对应,获取参数 $\sigma^2$ 的验后分布 $IG(\alpha_n, \beta_n)$ 后,即可计算其可信区间和 $r$ 的可信区间。贝叶斯区间估计的核心是计算可信区间,它表示参数以一定概率落在该区间内。

对于后验分布 $IG(\alpha_n, \beta_n)$ 的 $100(1-\alpha)\%$ 可信区间 $[L_{\sigma^2}, U_{\sigma^2}]$ 可以通过后验分布的分位数求得:

$$P(L_{\sigma^2} \leq \sigma^2 \leq U_{\sigma^2}) \quad (29)$$

采用从后验分布直接抽样的标准方法,即从逆伽马分布直接抽样,进行制导精度 $\sigma$ 和平均脱靶量 $r$ 的区间估计。具体操作步骤是:通过从后验分布抽取大量样本 $\sigma_j^2$ , $j$ 为抽样样本量;然后对每个样本计算 $\sigma_j = \sqrt{\sigma_j^2}$ 和 $r_j = 2\sqrt{2/\pi} \sigma_j$ ,再对 $\sigma_j$ 和 $r_j$ 计算样本分位数来获得区间 $[L_{\sigma}, U_{\sigma}]$ 和 $[L_r, U_r]$ 。

以上便给出了导弹三维射击精度贝叶斯点估计值和区间估计的完整方法。

值得指出的是,贝叶斯推断不仅能获得参数的后验分布,还可自然导出后验预测分布。后验预测分布 $p(r_{\text{new}}/r)$ 描述了在已有样本数据 $r$ 条件下,未来一次独立试验中脱靶量 $r_{\text{new}}$ 的概率分布,其表达式为

$$p(r_{\text{new}}/r) = \int_0^\infty p(r_{\text{new}}/\sigma) \pi(\sigma/r) d\sigma \quad (30)$$

该分布将参数后验的不确定性传递至未来观测,其方差可分解为 $\text{Var}(r_{\text{new}}/r) = E[\text{Var}(r_{\text{new}}/\sigma)/r] + \text{Var}(E(r_{\text{new}}/\sigma)/r)$ ,即组内方差与组间方差之和,反映了固有随机性与参数估计不确定性的双重贡献。

基于预测分布可定义预测风险 $R_{\text{pred}} = \int L(r_{\text{new}}, \hat{r}) p(r_{\text{new}}/r) dr_{\text{new}}$ ,通过最小化预测风险可确定最优试验规模或制定序贯停试准则。限于篇幅,本文不展开具体推导,但其为后续试验设计、样本量规划及风险决策提供了理论支撑。

### 3 实例分析

为验证本文方法的有效性与工程适用性,以武装直升机载空空导弹制导精度评估为例进行分析。根据导弹制导精度考核需求,获取了该型导弹的脱靶量测试数据,共计12个样本,具体如下: $r = [1.88 \text{ m}, 11.47 \text{ m}, 4.39 \text{ m}, 6.83 \text{ m}, 6.02 \text{ m}, 3.82 \text{ m}, 4.10 \text{ m}, 3.74 \text{ m}, 3.50 \text{ m}, 5.42 \text{ m}, 5.30 \text{ m}, 4.56 \text{ m}]$ 。

采用本文所述贝叶斯方法计算射弹散布参数 $\sigma$ ,然后根据 $\sigma$ 的后验期望估计制导精度。

确定先验分布 $IG(\alpha_0, \beta_0)$ :根据相关仿真试验结果,利用等效样本量法<sup>[8,16]</sup>,先验信息等效于 $n_0=6$ 次试验,其样本2阶矩为 $S_0=24$ ,则得到超参数 $\alpha_0 = n_0/2 = 3$ 、 $\beta_0 = S_0/2 = 12$ ,即先验分布为 $IG(3, 12)$ 。

计算后验分布 $IG(\alpha_n, \beta_n)$ :根据现场试验数据和先验分布,得到后验分布超参数为

$$\begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 + 3n/2 = 21 \\ \beta_n = \beta_0 + T/2 = \beta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{12} r_i^2 = 198.58 \end{cases} \quad (31)$$

式中:统计量 $\sum_{i=1}^{12} r_i^2 = 373.16$ 。

综上,后验分布 $IG(\alpha_n, \beta_n)$ 为 $IG(21, 198.58)$ 。

制导精度估计:基于后验分布进行贝叶斯统计推断。为便于对比,表1同时给出了经典最大似然估计(MLE)与本文贝叶斯方法的估计结果,计算过程为

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\beta'/(\alpha'-1)} = 3.15 \text{ m}, \hat{\mu}_r = 1.596 \times 3.15 = 5.03 \text{ m}。$$

表1 制导精度特征参数估计结果

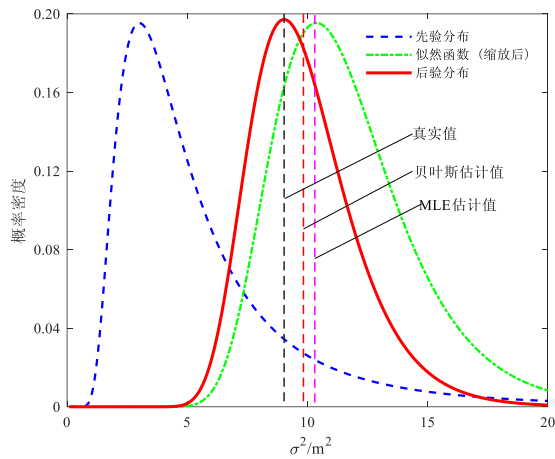
Table 1 Estimation results of guidance accuracy characteristic

| parameters |                       |                   |              |
|------------|-----------------------|-------------------|--------------|
| 估计方法       | $\sigma^2/\text{m}^2$ | $\sigma/\text{m}$ | $r/\text{m}$ |
| MLE 估计     | 10.37                 | 3.22              | 5.14         |
| 贝叶斯点估计     | 9.93                  | 3.15              | 5.03         |
| 95%可信区间    | [6.56, 14.6]          | [2.53, 3.9]       | [4.04, 6.23] |

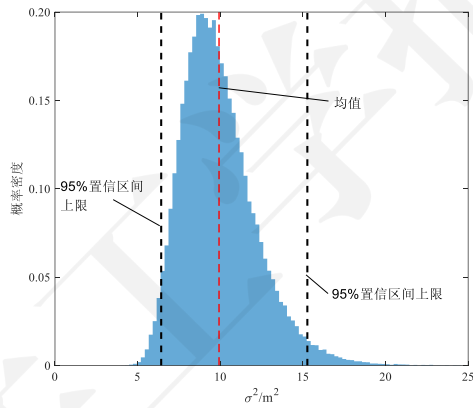
由表1可见,贝叶斯估计结果与MLE估计值较为接近,但贝叶斯方法同时提供了参数的后验分布与可信区间,信息更加丰富。基于后验分布计算得到了制导精度参数 $r$ 的95%可信区间为 $[L, U] = [4.04 \text{ m}, 6.23 \text{ m}]$ 。

m], 这意味着有 95% 的把握认为真实的  $r$  值落在此区间内。与经典频率学派的置信区间相比, 贝叶斯可信区间的概率解释更符合工程直观。

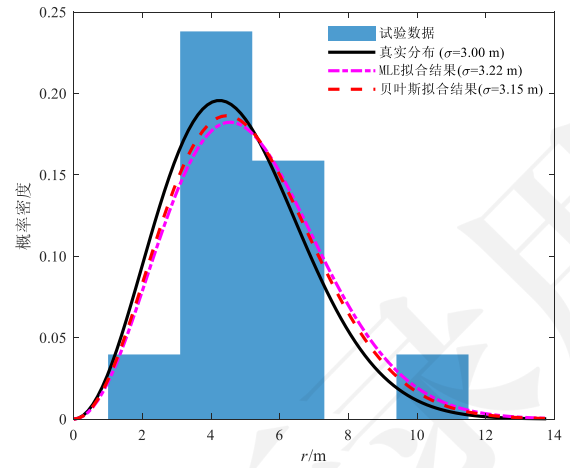
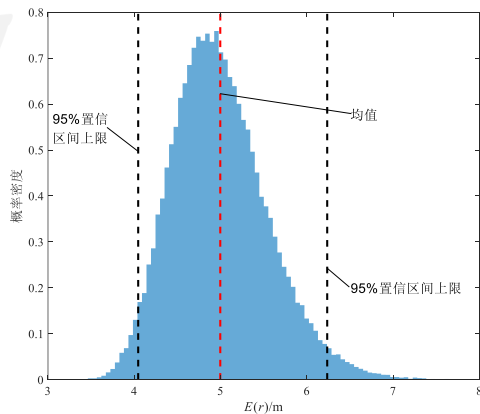
图 4 (a) 绘制了  $\sigma^2$  的先验分布、似然函数、后验分布, 直观展示贝叶斯更新过程。从图 4(a)中可以看到, 后验分布集中于先验分布和似然函数之间, 体现了先验信息与现场数据的有效融合。贝叶斯估计值相比 MLE 估计值更靠近先验, 反映了小样本条件下先验信息对估计结果的调节作用。



(a)  $\sigma^2$  先验、似然和后验分布  
(a) Prior, likelihood, and posterior distributions of  $\sigma^2$



(a)  $\sigma^2$



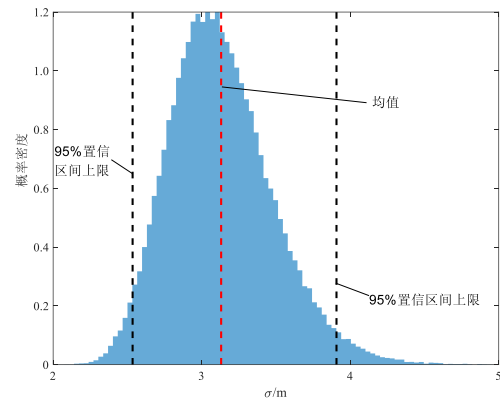
(b) 脱靶量分布的拟合效果对比  
(b) Distribution fitting of miss distance

图 4 贝叶斯估计结果对比

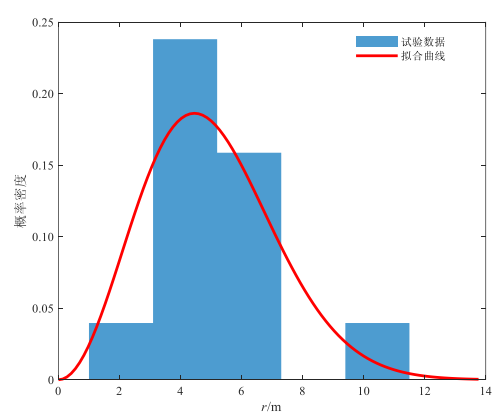
Fig.4 Comparison of Bayesian estimation results

图 4 (b) 绘制了脱靶量数据的直方图, 以及基于 MLE 估计、贝叶斯估计与真实分布的 MB 分布拟合曲线。贝叶斯估计拟合的曲线比 MLE 曲线更为扁平、分散, 表明贝叶斯方法对较大脱靶量赋予了更高的概率, 评估结论更为稳健和保守。

图 5 进一步绘制了  $\sigma^2$ 、 $\sigma$ 、 $E[r]$  和  $r$  的后验分布及区间估计结果, 可直观看出各参数的可信区间范围。



(b)  $\sigma$



(c)  $E(r)$ (d)  $r$ 

图5 贝叶斯区间估计结果

Fig.5 Bayesian interval estimation results

综合以上分析,本文方法能够充分利用先验信息,在有限样本条件下显著提升制导精度估计的准确性与稳健性,具有一定的工程参考价值。

#### 4 结论

本文针对机载空空导弹鉴定定型试验中的小样本问题,提出一种基于贝叶斯理论的空空导弹三维制导精度评估方法,有效解决了经典统计方法在小样本下估计精度偏低的问题。得出以下主要结论:

1)在确认三维脱靶量  $r$  服从 MB 分布的统计规律的基础上,建立了三维脱靶量  $r$  与各方向位置散布参数  $\sigma$  之间的函数关系,解决了小样本条件下利用脱靶量实测数据准确估计散布参数  $\sigma$  的难题。

2)构建了小样本条件下空空导弹三维制导精度的贝叶斯推断方法,明确了先验分布确定、先验超参数计算和基于后验分布的点估计和区间估计的具体操作步骤,该方法充分利用贝叶斯理论融合先验信息与现场样本信息,有效提升了小样本条件下参数估计的准确性与稳健性,方法操作性较强。

3)武装直升机空空导弹实例验证的结果表明,本文方法能够充分利用先验信息,有效改善了小样本条件下精度估计的稳健性和可靠性。

4)本文方法从一般性假设条件出发,构建了适用于各类导弹(地空、反巡航、反舰等)三维射击精度的贝叶斯评估框架,有效解决了经典统计方法在小样本下估计精度偏低的问题,具有良好的工程推广价值。

本文研究基于各方向同方差的假设,后续可进一步研究各向异性或存在相关性等复杂场景下的贝叶斯评估方法,增强方法的工程适用性。

#### 参考文献 (References)

- [1] 孙毓凯,孙斐,任宏光,等.直升机载空空导弹工程验证试验与鉴定技术研究[J]. 弹箭与制导学报, 2020, 40(3): 60-64.  
SUN Y K, SUN F, REN H G, et al. Research on engineering verification test and evaluation technology of air-to-air missile for helicopter[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2020, 40(3): 60-64 (in Chinese).
- [2] 宁小磊,王晨辉,刘艳云,等.导弹武器三维射击精度小样本序贯概率比检验方法[J].中国惯性技术学报, 2026, 34(5): 521-530.  
NING X L, WANG C H, LIU Y Y, et al. A small-sample sequential probability ratio test method for three-dimensional missile weapon firing accuracy[J]. Journal of

- Chinese Inertial Technology, 2026, 34(5): 521-530. (in Chinese).
- [3] 豆建斌,王小兵,杨红坚,等. 成像制导导弹试验鉴定半实物仿真系统设计与应用[J]. 系统仿真学报, 2024, 36(2): 522-532.  
DOU J B, WANG X B, YANG H J, et al. Design and application of Hardware-in-the-loop Simulation System for infrared imaging guide missile test and evaluation[J]. Journal of System Simulation, 2024, 36(2): 522-532. (in Chinese)
- [4] 宋天莉, 安维廉, 王书宁. 三维射击精度的一阶逼近评估方法[J]. 宇航学报, 2007, 28(5): 1411-1414.  
SONG T L, AN W L, WANG S N. First-order approximation evaluation method for three-dimensional firing accuracy[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(5): 1411-1414. (in Chinese)
- [5] 宁小磊,曾伟,赵新,等.导弹对空射击精度的小子样球概率误差检验方法[J].中国惯性技术学报,2025,33(11): 1156-1166.  
NING X L, ZENG W, ZHAO X, et al. Small-sample spherical probabilistic error test method for missile anti-air firing accuracy[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2025, 33(11): 1156-1166. (in Chinese)
- [6] MIAO Y F, WANG G, TIAN W. A new method for evaluating the firing precision of multiple launch rocket system based on Bayesian theory[J]. Defence Technology, 2024, 32(2): 232-241.
- [7] TRZUN Z, VRDOLJAK M. Probability of hitting the target with an imperfectly manufactured projectile[J]. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 21(1): 321-334.
- [8] 宁小磊, 吴颖霞, 赵新. 融合仿真数据的小子样圆概率误差评估[J]. 兵工学报, 2021, 42(2): 388-398.  
NING X L, WU Y X, ZHAO X. Small Sample Circular Error Probable Estimation Based on Fusing Simulation and Flight Test Data[J]. Acta Armamentarii, 2021, 42(2): 388-398. (in Chinese)
- [9] 井沛良, 段宇, 韩超, 等. 基于高斯混合模型和期望最大化算法的非高斯分布圆概率误差估计方法研究[J]. 兵工学报, 2019, 40(2): 369-376.  
JING P L, DUAN Y, HAN C, et al. Circular error probable estimation method based on Gaussian mixture model and expectation maximum algorithm for non-Gaussian distribution[J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(2): 369-376. (in Chinese)
- [10] 杨华波, 张士峰. 导弹命中精度的序贯截尾概率圆检验方法[J].国防科技大学学报, 2024, 46(2):62-69.  
YANG H B, ZHANG S F. Sequential truncated probability circle test for hit accuracy of missile[J]. Journal of National

- University of Defense Technology, 2024, 46(2):62-69. (in Chinese)
- [11] 李艳, 濮晓龙. 基于 Koopman-Darmois 分布族的序贯网图检验方法[J]. 中国科学, 2009, 39(5): 614-624.  
LI Y, PU X L. Sequential network graph verification method based on Koopman-Darmois distribution family[J]. Science in China, 2009, 39(5): 614-624. (in Chinese)
- [12] 闫章更, 濮晓龙. 现代军事抽样检验方法及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.  
YAN Z G, PU X L. Modern Military Sampling Inspection Methods and Their Applications[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008. (in Chinese)
- [13] 刘昊邦, 史宪铭, 屈金标, 等. 基于多项分布的导弹命中精度贝叶斯验收方案设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50(6):1991-2000.  
LIU H B, SHI X M, QU J B, et al. Design of Bayesian acceptance scheme for missile hit accuracy based on multinomial distribution[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50(6):1991-2000. (in Chinese)
- [14] 王康, 史贤俊, 秦亮, 等. 基于 Bayes 小子样理论和序贯网图检验的武器装备测试性验证试验方案设计[J]. 兵工学报, 2019, 40(11): 2319-2328.  
WANG K, SHI X J, QIN L, et al. Design of BSST-SMT-based weaponry testability verification test scheme[J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(11): 2319-2328. (in Chinese)
- [15] 刘昊邦, 史宪铭, 郝冰, 等. 基于多项分布的弹药多批次试验命中概率估计[J]. 兵工学报, 2023, 44(10): 3156-3164.  
LIU H B, SHI X M, HAO B, et al. Estimation of ammunition hit probability in multiple-batch tests using multinomial distribution[J]. Acta Armamentarii, 2023, 44(10): 3156-3164. (in Chinese)
- [16] 宁小磊, 吴颖霞, 赵新, 等. 小样本概率关联度模型研究[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(5): 1164-1171.  
NING X L, WU Y X, ZHAO X, et al. Research on small sample probability relational degree model[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(5): 1164-1171. (in Chinese)
- [17] GUO J Y, LI Y F, PENG W W, et al. Bayesian information fusion method for reliability analysis with failure-time data and degradation data[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2022, 38(4): 99-117.
- [18] PAPANANIAS M, MCLEAY T E, MAHFOUF M, et al. A Bayesian information fusion approach for end product quality estimation using machine learning and on-machine probing[J]. Journal of Manufacturing Processes, 2022, 76: 475-485.
- [19] 李康, 史宪铭, 李广宁, 等. 基于正态-逆伽马分布的反巡航导弹命中概率估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(8): 2621-2627.  
LI K, SHI X M, LI G N, et al. Anti-cruise missile hit probability estimation method based on normal-inverse gamma distribution[J]. Systems Engineering and Electronics, 2022, 44(8):2621-2627. (in Chinese)
- [20] 刘昊邦, 史宪铭, 赵美, 等. 基于正态-逆威沙特分布的地空导弹命中概率贝叶斯估计[J]. 兵工学报, 2024, 45(1): 339-348.  
LIU H B, SHI X M, ZHAO M, et al. Bayesian estimation of surface-to-air missile hit probability based on normal-inverse Wishart distribution[J]. Acta Armamentarii, 2024, 45(1): 339-348. (in Chinese)
- [21] 宁小磊, 吴颖霞. 基于等效样本和实仿融合的现场小子样试验制导精度评估方法[J]. 中国惯性技术学报, 2021, 29(2): 264-272.  
NING X L, WU Y X. Guidance accuracy evaluation method of field small sample test based on equivalent sample and real simulation fusion[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2021, 29(2): 264-272. (in Chinese)
- [22] 孙锦, 李国林, 许诚. 基于仿真信息的反舰导弹小子样靶场试验综合评定方法. 系统工程理论与实践, 2014, 34(4): 1077-1088  
SUN J, LI G L, XU C. Synthetical evaluation method of anti-ship missile in range trial in condition of small sample based on simulation information[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2014, 34(4): 1077-1088 (in Chinese)
- [23] 王亚龙, 史宪铭, 刘昭, 等. 基于特小子样下弹药命中概率的贝叶斯改进算法[J]. 系统工程与电子技术, 2026, 48(4): 1322-1330.  
WANG Y L, SHI X M, LIU Z, et al. Bayesian improved algorithm for estimating ammunition hit probability under ultra-small subsample[J]. Systems Engineering and Electronics, 2026, 48(4): 1322-1330.
- [24] 宁小磊. 基于麦克斯韦-玻尔兹曼分布的空间脱靶量试验评估[J]. 兵工学报, 2026, 47(5):250776.  
NING X L. Test Evaluation of Spatial Miss Distance Based on Maxwell-Boltzmann Distribution[J]. Acta Armamentarii, 2026, 47(5): 250776. (in Chinese)
- [25] 李树. 光子与相对论麦克斯韦分布电子散射截面的蒙特卡罗计算方法[J]. 物理学报, 2018, 67(21): 215201.  
L S. Monte Carlo method for computing relativistic photon-Maxwellian electron scattering cross sections[J]. Acta Physica Sinica, 2018, 67(21): 215201. (in Chinese)
- [26] 马妍, 汪建均, 冯泽彪. 非正态响应稳健参数设计的贝叶斯建模与优化[J]. 系统工程与电子技术, 2023, 45(3): 921-930.  
MA Y, WANG J J, FENG Z B. Bayesian modeling and optimization of robust parametric design with non-normal response[J]. Systems Engineering and Electronics, 2023, 45(3): 921-930. (in Chinese)